TOETS ProgrammaCorrectheid

1 oktober 2003

09.15 – 11.00 uur

Opgave 1 (6 punten)

Gegeven is de specificatie

CONST
  $n \in INTEGER$; $\{n > 0\}$
  $a \in ARRAY\ [0\ ..\ n]\ OF\ INTEGER$; $\{a[n] = 0\}$
VAR
  $m : INTEGER$;
  $\{P :\ M = (\mathbf{MIN}\ t\ :\ 0 \leq t \leq n\ \ \wedge\ \ a[t] \leq (\Sigma\, i : 0 \leq i < t : a[i])\ :\ t)\}$
T;
  $\{Q :\ m = M\}$

- Introduceer voor $0 \leq k \leq n$ de expressie

$$S(k) = (\Sigma\, i\ :\ 0 \leq i < k\ :\ a[i])$$

  en leid recurrente betrekkingen af voor S.

- Beargumenteer dat het domein van de MIN-kwantificatie uit de preconditie niet leeg is.

- Bepaal een geannoteerd commando T dat aan bovenstaande specificatie voldoet.
  NB: het staat je natuurlijk vrij om een extra variabele te declareren.

Opgave 2 (4 punten)

Gegeven is de specificatie

CONST
  $n \in INTEGER$; $\{n \geq 0\}$
  $b \in ARRAY\ [0\ ..\ n)\ OF\ BOOLEAN$
VAR
  $x : INTEGER$;
  $\{P : X = (\Sigma\, i\ :\ 0 \leq i < n\ \ \wedge\ \ b[i]\ :\ 2^i)\}$
S;
  $\{Q : x = X\}$

Bepaal een geannoteerd commando S dat aan deze specificatie voldoet.
Ook hier zul je wel extra variabelen nodig hebben.

einde

Opgave 1

$S(k)$

$= (*\ \text{per definitie}\ *)$

$(\Sigma\, i : 0 \leq i < k : a[i])$

$= (*\ \text{term afsplitsen; EIS: } k > 0\ *)$

$(\Sigma\, i : 0 \leq i < (k-1) : a[i]) + a[k-1]$

$= (*\ \text{herkennen}\ *)$

1 $S(k-1) + a[k-1]$

$S(0)$

$= (*\ \text{per definitie}\ *)$

1 $(\Sigma\, i : 0 \leq i < 0 : a[i])$

$= (*\ \text{som over leeg domein}\ *)$

0

We weten dat $n > 0$, dus a bevat tenminste twee elementen. ~~[illegible] voldoet altijd aan de [illegible] bij der MIN-kwantificatie want [illegible]~~

Er is altijd een element in de MIN-kwantificatie. We onderscheiden twee gevallen:

2 – $(\Sigma\, i : 0 \leq i < n : a[i]) \geq 0$

In dit geval voldoet $t = n$, want $a[t] = a[n] = 0 \leq S(n)$

– $(\Sigma\, i : 0 \leq i < n : a[i]) < 0$

In dit geval bevat a tenminste één negatief getal. Noem de index van het eerste negatieve getal t, dan weten we $0 \leq t < n$ en $a[t] < 0$ en $S(t) \geq 0$. Dus voldoet deze t aan de eisen van de MIN-kwantificatie.

Nu eerst de preconditie herschrijven! Dat voorkomt het

Stap 1: invariant en guard meeslepen van de kwantificatie ?

$J \equiv x = S(m) \wedge 0 \leq m \leq n \wedge (\forall j : 0 \leq j < m : a[j] > S(j))$

$B \equiv a[m] > x$

$J \wedge \neg B$
$\equiv$ (* per definitie *)

$x = S(m) \wedge 0 \le m \le n \wedge a[m] \le x \wedge (\forall j : 0 \le j < m : a[j] > S(j))$ ✓
$\equiv$ (* invullen *)
2 $0 \le m \le n \wedge a[m] \le S(m) \wedge (\forall j : 0 \le j < m : a[j] > S(j))$
$\Leftrightarrow$ (* omzetten naar MIN-kwantificatie *)
2 $m = (\text{MIN}\, j : 0 \le j \le n \wedge a[j] \le S(j) : j)$ ✓
$\equiv$ (* herkennen *)
$m = M$ ✓

Stap 2: initialisatie

$\{n > 0 \wedge a[n] = 0\}$
$\{n > 0 \wedge a[n] = 0 \wedge S(0) = 0 \wedge 0 \le 0 \le n \wedge$
$(\forall j : 0 \le j < 0 : a[j] > S(j))\}$ leeg domein, dus $\forall$ .. true.
$m := 0;$
1 $\{0 \le m \le n \wedge S(m) = 0 \wedge (\forall j : 0 \le j < m : a[j] > S(j))\}$
$x := 0;$
$\{0 \le m \le n \wedge x = S(m) \wedge (\forall j : 0 \le j < m : a[j] > S(j))\}$ ✓
$\{J\}$

Stap 3: variante functie

$vf = n - m$ ✓
J
$\equiv$ (* per definitie *)
$0 \le m \le n \wedge \ldots$
$\Rightarrow$
2 $n - m \ge 0$
$\equiv$
$vf \ge 0$ ✓

Stap 4: body

$\{J \wedge B \wedge vf = V\}$
$\{x = S(m) \wedge 0 \le m \le n \wedge (\forall j : 0 \le j < m : a[j] > S(j)) \wedge a[m] > x$
$\wedge\ vf = V\}$ uitschrijven
(* term opnemen in $\forall$-kwantificatie *) $a[m] > x = S(m)$
$\{x = S(m) \wedge 0 \le m \le n \wedge (\forall j : 0 \le j < (m+1) : a[j] > S(j)) \wedge vf = V\}$
(* zoals eerder beargumenteerd: $J \wedge B \Rightarrow m < n$ anders zou het domein van de MIN-kwantificatie leeg zijn *).

Woonplaats:

Opgave 1 (vervolg)

$\{x = S(m) \wedge 0 \le m < n \wedge (\forall j: 0 \le j < (m+1): a[j] > S(j)) \wedge vf = V\}$
$\{x = S((m+1)-1) \wedge 0 \le (m+1) \le n \wedge (\forall j: 0 \le j < (m+1): a[j] > S(j)) \wedge \overset{n-m}{\cancel{vf}} = V\}$
$m := m+1;$ past niet ?
$\{x = S(m-1) \wedge 0 \le m \le n \wedge (\forall j: 0 \le j < m: a[j] > S(j)) \wedge n-m < V\}$
(* recurrente betrekking op S *): EIS $m > 0$!
~~{x = S(m) - a[m-1] ∧ 0 ≤ m ≤ n ∧ (∀j: 0≤j<m: a[j] > S(j)) ∧ vf < V}~~
~~(* rekenregel A *)~~
$\{x = S(m-1) \wedge S(m) = S(m-1) + a[m-1] \wedge 0 \le m \le n \wedge$
1 $\quad (\forall j: 0 \le j < m: a[j] > S(j)) \wedge vf < V\}$?
(* invullen *)
$\{S(m) = x + a[m-1] \wedge 0 \le m \le n \wedge (\forall j: 0 \le j < m: a[j] > S(j)) \wedge vf < V\}$
$x := x + a[m-1]$
$\{x = S(m) \wedge 0 \le m \le n \wedge (\forall j: 0 \le j < m: a[j] > S(j)) \wedge vf < V\}$
$\{J \wedge vf < V\}$ ✓

Stap 5: samenvatting

```
CONST
   n ∈ INTEGER;
   a ∈ ARRAY [0..n] OF INTEGER;
VAR
   m, x ∈ INTEGER
{P: n > 0 ∧ a[n] = 0 ∧ M = (MIN t: 0 ≤ t ≤ n ∧ a[t] ≤ S(t): t)}
  (* vf = n - m *)
m := 0;  x := 0;
{J: x = S(m) ∧ 0 ≤ m ≤ n ∧ (∀j: 0 ≤ j < m: a[j] > S(j))}
WHILE a[m] > x DO
BEGIN
   m := m+1;
   x := x + a[m-1];
END;
{Q: m = M}
```

1

Adres:

Postcode en Woonplaats:

Jaar van eerste inschrijving:

Datum:

Naam docent:

Opgave 2

$S(k)$

1 $=$ (* definieer *)

$(\Sigma i : 0 \le i < k \wedge b[i] : 2^i)$

$=$ (* ~~termen~~ domein splitsen ~~…~~ *)

$(\Sigma i : 0 \le i < (k-1) \wedge b[i] : 2^i) + (\Sigma i : i = (k-1) \wedge b[i] : 2^i)$

$=$ (* gevalsonderscheid *)

$$\begin{cases} (\Sigma i : 0 \le i < (k-1) \wedge b[i] : 2^i) & \text{als } b[k-1] = \text{false} \\ (\Sigma i : 0 \le i < (k-1) \wedge b[i] : 2^i) + 2^{k-1} & \text{als } b[k-1] = \text{true} \end{cases}$$

$=$ (* herkennen *)

$$\begin{cases} S(k-1) & \text{als } b[k-1] = \text{false} \\ S(k-1) + 2^{k-1} & \text{als } b[k-1] = \text{true} \end{cases}$$

2

$S(0)$

$=$ (* per definitie *)

$(\Sigma i : 0 \le i < 0 \wedge b[i] : 2^i)$

$=$ (* som over leeg domein *)

0

Stap 1: invariant en guard

$J \equiv 0 \le k \le n \wedge x = S(k) \wedge y = 2^k$

$B \equiv k \ne n$

$J \wedge \neg B$

$\equiv$ (* per definitie *)

$0 \le k \le n \wedge x = S(k) \wedge k = n$

1 $\Rightarrow$ (* invullen *)

$x = S(n)$

$\equiv$ (* Hier mag wel enige toelichting. Wat je hier doet is net niet helemaal fraai. Je kunt je beroepen op het constante predikaat $X = S(n)$, maar doe dat dan ook *)

Q

Stap 2: initialisatie

$\{n \ge 0\}$

$\{\cancel{n \ge 0} \wedge 0 \le 0 \le n \wedge 0 = S(0)\}$

$x := 0;$ anders past het niet!

$\{0 \le 0 \le n \wedge x = S(0)\}$
$k := 0;$
$\{0 \le k \le n \wedge x = S(k)\}$
$\})\}$

$\}$

$)\}$

Stap 3: variante functie

$vf = n - k$ ✓

J

$\equiv$ (* per definitie *)

$0 \le k \le n \wedge x = S(k)$

$\Rightarrow$ (* rekenen *)

1 $n - k \geq 0$

$\equiv$ (* herkennen *)

$vf \geq 0$ ✓

Stap 4: body

$\{J \wedge \neg B \wedge vf = V\}$

$\{0 \le k \le n \wedge k \ne n \wedge x = S(k) \wedge vf = V\}$

(* logica *)

$\{0 \le k < n \wedge x = S(k) \wedge vf = V\}$

IF b[k] THEN

$\{0 \le k < n \wedge x = S(k) \wedge b[k] \wedge vf = V\}$

~~$\{0 \le k < n \wedge x = S(k) \wedge b[k] \wedge S(k+1) = S(k) + 2^k \wedge vf = V\}$~~

(* $b[k] \Rightarrow S(k+1) = S(k) + 2^k$ *)

$\{0 \le k < n \wedge x = S(k) \wedge S(k+1) = S(k) + 2^k \wedge vf = V\}$

(* x invullen *)

$\{0 \le k < n \wedge S(k+1) = x + 2^k \wedge vf = V\}$

$x := x + 2^k;$

$\{0 \le k < n \wedge x = S(k+1) \wedge vf = V\}$

2^k is geen standaard-expressie. Je zult dit mbv een variabele moeten administreren.

ELSE

$\{0 \le k < n \wedge x = S(k) \wedge \neg b[k] \wedge vf = V\}$

(* $\neg b[k] \Rightarrow S(k+1) = S(k)$ *)

$\{0 \le k < n \wedge x = S(k) \wedge S(k+1) = S(k) \wedge vf = V\}$

(* x invullen *)

1 $\{0 \le k < n \wedge x = S(k+1) \wedge vf = V\}$

skip;

END

(* samenvoegen *)

$\{0 \le k < n \wedge x = S(k+1) \wedge n - k = V\}$

$\{0 \le (k+1) \le n \wedge x = S(k+1) \wedge n - (k+1) < V\}$

Postcode en Woonplaats: | Jaar van eerste inschrijving: | Naam docent:

Opgave 2 (vervolg)

~~k~~
$k := k+1;$
$\{0 \leq k \leq n \wedge x = S(k) \wedge n-k < V\}$
(* herkennen *)
$\{J \wedge vf < V\}$

Stap 5: samenvatting

CONST
 $n \in$ INTEGER;
 $b \in$ ARRAY [0...n) OF BOOLEAN;
VAR
 $x, k \in$ INTEGER;
$\{P: n \geq 0 \wedge X = (\Sigma\ i : 0 \leq i < n \wedge b[i] : 2^i)\}$
 $x := 0;$
 $k := 0;$
$\{J: 0 \leq k \leq n \wedge x = S(k)\}$
 (* $vf = n-k$ *)
WHILE $k = n$ DO
BEGIN
 IF b[k] THEN
  $x := x + 2^k;$
 ELSE
  skip;
 END
 $k := k+1;$
END
$\{Q: x = X\}$